

И.П. Мазур

ФГБОУ ВПО «Липецкий государственный технический университет», г. Липецк, e-mail: mazur@stu.lipetsk.ru

On level with plastic deformations an elastic interaction between elements of rolling equipment and rolled metal takes important place in sheet steel rolling. Contacts between work roll and rolled band, between work and backup rolls are examples of such interactions. In contrast to the work roll and rolled band contact interaction, which is the subject of many detailed theoretical and experimental investigations, the work roll and backup roll contact is considered only from the point of view of rolling load redistribution in multirolled systems. However, wide application of profiled rolls' axial shifting in unscheduled rolling technology demands further investigations of elastic interaction with slippage. Inconstancy of distances between rolls' pivot pins and contact surfaces leads to local mismatch between peripheral speeds of work and backup rolls. This effect is a reason of slippage. Later on it leads to uneven wear of work rolls. It must be necessarily taken into account while developing roll contours for axial shifting and algorithms for unscheduled rolling technology with automatic profile and flatness control for ensuring of rolled band's profile which satisfies consumer's demands. In the article there is formulated target setting of elastic contact of two osculating half-planes under speed asymmetry and compressive load. Principle of virtual work was used. There are obtained approximate solutions for completely elastic earth describing deflected mode without relative speed (Hertzian problem) and under speed asymmetry, which leads to appearance of slip zones on a contact surface. Influence of acting load, speed asymmetry, constant of friction and Poisson's ratio on slip zones' lengths is shown. In the article there are presented dependencies for correction of wear factors of work rolls, which are used in finishing train's stands of wide-strip hot rolling mill with equipment for axial shifting. These dependencies are used to determine wear values of profiled work and backup rolls.

Большинство задач обработки металлов давлением, связанные с нахождением границ контакта инструмента с металлом и характером их взаимодействия являются статически неопределенными. Например, одной из таких статически неопределимых задач является контакт рабочих и опорных валков прокатной клетки. Накладываемые на систему для устранения этой неопределенности дополнительные связи и соотношения, приводят к необходимости решения больших систем уравнений, часто нелинейных.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Рассмотрим взаимодействие двух упругих полуплоскостей, расположенных параллельно и которые могут совершать перемещение как жесткие тела (рис. 1). В качестве внешней силы, в нашем случае, выступает сила, сдавливающая тела, величина и направление которой остаются постоянными при перемещении полуплоскостей. Вне области контакта между поверхностями имеется зазор, и они свободны от напряжений.

Из-за неравенства скоростей верхней и нижней полуплоскостей, v_t и v_b соответственно, на площадке контакта образуются зоны протяженностью ℓ_1 и ℓ_3 , где точки поверхностей скользят друг относительно друга, а также зона протяженностью ℓ_2 , где происходит выравнивание скоростей и сцепление поверхностей полуплоскостей.

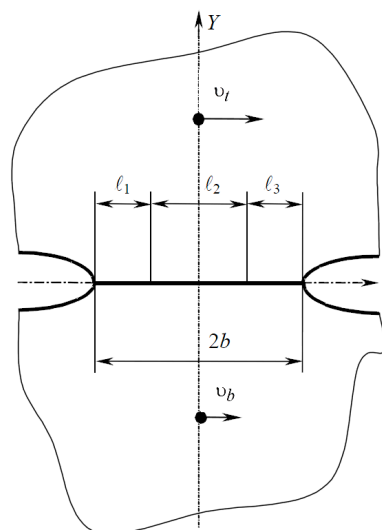


Рис. 1. Упругий контакт полуплоскостей

В дальнейшем примем, что

1. в области контакта имеют место только упругие деформации, подчиненные закону Гука;
2. область контакта весьма мала, по сравнению с общими поверхностями соприкасающихся полуплоскостей;
3. материал цилиндров однороден и изотропен.

Согласно принципу Лагранжа, для тела находящегося в равновесии сумма работ всех действующих на него внешних и внутренних сил равна нулю на любых возможных перемещениях [1], т.е.

$$\Delta E = \Delta A_{\text{int}} + \Delta A_{\text{ext}},$$

(1)

где ΔE - вариация энергии системы; ΔE_{int} - вариация работы внутренних сил; ΔA_{ext} - вариация работы внешних сил.

Вариация работы внутренних сил может быть представлена

$$\Delta A_{\text{int}} = \delta \left[0.5 \iiint_V (G \cdot \Gamma^2 + 3 \cdot \varepsilon^2 \cdot k) dV \right], \quad (2)$$

где G - модуль сдвига, $G = 0.5E / (1 + \mu)$; Γ - интенсивность деформации сдвига; ε - средняя деформация $\varepsilon = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) / 3$; k - модуль объемной деформации, $k = E / (1 - 2\mu)$; E - модуль Юнга; μ - коэффициент Пуассона.

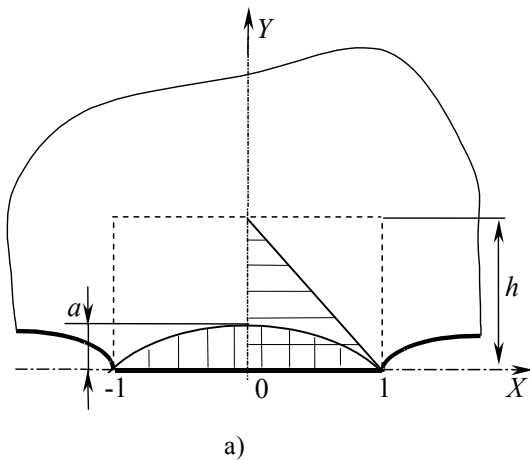
Для зон скольжения характерно то, что наряду с нормальными напряжениями на их поверхностях возникают касательные напряжения трения, а в силу неопределенности границы этих зон вариация работы внешних сил в уравнении (1)

$$\delta \left[0.5 \iiint_V (G \cdot \Gamma^2 + 3 \cdot \varepsilon^2 \cdot k) dV - \sum_j \iint_{S_j} f_j \cdot v_j \cdot \left(\frac{E}{1 + \mu} \cdot \varepsilon_y \Big|_{y=0} + \frac{3\mu}{1 + \mu} \cdot k \cdot \varepsilon \Big|_{y=0} \right) dS \right] \equiv 0. \quad (4)$$

1.1. Область деформирования

Рассмотрим движение точек в системе координат, связанной с зоной, где произошло сцепление контактных поверхностей. При внешнем воздействии в полуплоскостях происходит упругая деформация некоторой области V . Предположим, что деформированная область имеет прямоугольную форму, одна сторона которой равна ширине площадки контакта, а другая h - условной глубине проникновения деформации - рис. 2а (все размеры и перемещения нормированы к полуширине площадки контакта b).

1.2. Кинематически допустимое поле скоростей



будет отлична от нуля и может быть определено

$$\text{как } \Delta A_{\text{ext}} = \sum_j \iint_{S_j} \tau_j \delta w_j dS_j = \delta \left[\sum_j \iint_{S_j} \tau_j w_j dS_j \right], \quad (3)$$

где τ_j - касательные напряжения трения в зонах скольжения; $j = 1, 3$ - соответственно зонам (рис.1); w_j - смещение точек поверхности в зонах скольжения; S_j - площадь зон скольжения.

Касательные напряжения трения определяются через нормальные

$$\tau_j = f_j \cdot \sigma_{y=0},$$

где f_j - коэффициент трения в j -зоне; $\sigma_{y=0}$ - нормальные напряжения на контактной поверхности.

Таким образом, вариационное уравнение (1) примет вид

Одновременно с вертикальным перемещением в области V точки получают горизонтальное перемещение, вызванное изменением скорости по зонам. Скорость точек на площадке контакта в зоне сцепления равна нулю, а скорость вне деформированной области будет Δv и $-\Delta v$, соответственно для верхней и нижней полуплоскости, где $\Delta v = (v_t - v_b) / 2$. Тогда в деформируемой области верхней полуплоскости можно выделить три характерные зоны («торможения», «сцепления» и «ускорения»), в которых будет иметь место кинематически допустимое поле скоростей, представленное на рис. 2б.

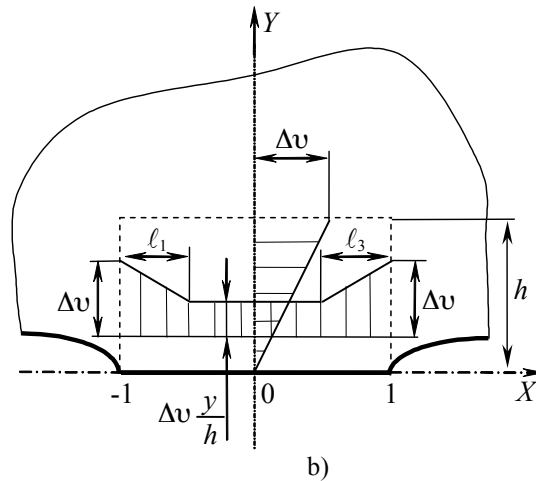


Рис. 2. Эпюра перемещений (а) и кинематически допустимое поле скоростей (б) в деформированной области

1.3. Расчет упругих деформаций

С учетом непрерывности изменения перемещений в деформированной области

линейные и угловые деформации могут быть

определены как

$$\varepsilon_x = \begin{cases} \frac{\Delta v}{v} \cdot \left(\frac{y}{h} - 1 \right) \cdot \frac{x+1}{\ell}, & -1 \leq x \leq -1+\ell; \\ \frac{\Delta v}{v} \cdot \left(\frac{y}{h} - 1 \right), & -1+\ell < x < 1-\ell; \\ \frac{\Delta v}{v} \cdot \left(1 - \frac{y}{h} \right) \cdot \frac{x-1}{\ell}, & 1-\ell \leq x \leq 1; \end{cases} \quad (5)$$

$$\varepsilon_y = -a \cdot (1-x^2) \cdot \frac{1}{h}; \quad (6)$$

$$\varepsilon_z = 0; \quad (7)$$

$$\gamma_{xy} = \begin{cases} -2 \cdot a \cdot x \cdot \left(1 - \frac{y}{h} \right) + \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{(x+1)^2}{2 \cdot h \cdot \ell}, & -1 \leq x \leq -1+\ell; \\ -2 \cdot a \cdot x \cdot \left(1 - \frac{y}{h} \right) + \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{2 \cdot x + 2 - \ell}{2 \cdot h}, & -1+\ell < x < 1-\ell; \\ -2 \cdot a \cdot x \cdot \left(1 - \frac{y}{h} \right) + \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{4 \cdot \ell - 2 \cdot \ell^2 - (x-1)^2}{2 \cdot h \cdot \ell}, & 1-\ell \leq x \leq 1; \end{cases} \quad (8)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

Для упрощения принято, что протяженность зон «торможения» и «ускорения» равны ($\ell_1 = \ell_3 = \ell$).

Таким образом, функционал энергии системы имеет следующий вид

1.4. Функционал энергии

$$\begin{aligned} E = 2G \cdot B \cdot & \left[\frac{1-\mu}{1-2\mu} \cdot \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 \cdot \frac{h \cdot (6-4\ell)}{9} + \frac{16}{15} \cdot \frac{a^2}{h} \right] + \\ & + \frac{4\mu-1}{1-2\mu} \cdot \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{a \cdot (\ell^3 - 4\ell^2 + 8)}{12} + \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 \cdot \frac{(8\ell^3 - 5\ell^2 - 60\ell + 80)}{60h} + \\ & + \frac{4}{9} \cdot a^2 \cdot h - 2f \cdot \left[\frac{1-\mu}{1-2\mu} \cdot \frac{a \cdot (\ell^4 - 3\ell^3)}{3h} - \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{\ell^2}{2} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где B - ширина площадки контакта в направлении оси Z .

Используя энергетическое условие Губера-Мизеса, легко показать, что при значениях $\Delta v/v$ и a менее чем 10^{-2} пластические деформации в области контакта отсутствуют, что является ограничением использования рассматриваемых уравнений.

2. При $\Delta v \neq 0$ формируются только две зоны - «торможения» и «сцепления», а зона «ускорения» отсутствует ($\ell_1 \neq 0 = \ell$ и $\ell_3 = 0$);
3. При $\Delta v \neq 0$ формируется общая последовательность зон - «торможения», «сцепления» и «ускорения» ($\ell_1 = \ell_3 = \ell$).

2. СЛУЧАИ СКОРОСТНОЙ АСИММЕТРИИ

В зависимости от скоростей полуплоскостей на площадке контакта верхней полуплоскости формируются зоны:

1. При $\Delta v = 0$ (контактная задача Герца) на всей площадке контакта имеет место только зона «сцепления» поверхностей;

2.1. Контактная задача Герца

Когда разность в скоростях отсутствует ($\Delta v = 0$) функционал энергии (9) приобретает вид

$$E = BG \left[\frac{16(1-\mu)a^2}{15(1-2\mu)h} + \frac{4}{9}a^2h - f \frac{2(1-\mu)a}{3(1-2\mu)h} (\ell^4 - 3\ell^3) \right],$$

а его минимизация по неизвестным h и ℓ приводит к системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial h} &= -\frac{4(1-\mu)a^2}{5(1-2\mu)h^2} + \frac{a^2}{9} + f \frac{(1-\mu)a}{(1-2\mu)h^2} (\ell^4 - 3\ell^3) = 0, & (I) \\ \frac{\partial E}{\partial \ell} &= 4\ell^3 - 9\ell^2 = 0. & (II) \end{aligned} \right\}$$

Решением уравнения (II) этой системы будут корни $\ell_1 = 0$ и $\ell_1 = 2,25$. Однако второй корень не имеет физического смысла, т.к. при равных скоростях полуплоскостей сцепление происходит на всей площадке контакта, и зона скольжения будет отсутствовать. Тогда из (I) глубина проникновения деформации определяется

$$h = \sqrt{\frac{12(1-\mu)}{5(1-2\mu)}}, \quad (10)$$

Тогда полуширина площадки контакта может быть найдена, как

$$b^2 = \frac{P_{sp} \cdot R}{E} \cdot \frac{3(1+\mu)}{2} \sqrt{\frac{12}{5} \cdot \frac{1-\mu}{1-2\mu}}, \quad (11)$$

где P_{sp} – среднее удельное давление на площадке контакта.

$$\begin{aligned} E = 2BG \left\{ \frac{1-\mu}{1-2\mu} \left[\left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 \frac{h(6-2\ell)}{9} + \frac{16a^2}{15h} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(4\mu-1)a}{24(1-2\mu)} \left(\frac{\Delta v}{v} \right) (\ell^3 - 4\ell^2 + 16) - \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 \frac{(\ell^3 + 45\ell - 80)}{60h} + \right. \\ \left. + \frac{4a^2h}{9} - 2f \left(\frac{(1-\mu)a(\ell^4 - 3\ell^3)}{(1-2\mu)3h} - \frac{\mu\ell^2}{2(1-2\mu)} \left(\frac{\Delta v}{v} \right) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

а вариационная задача приводится к следующей системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial h} &= \frac{(1-\mu)(6-2\ell)}{3(1-2\mu)} \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 - \frac{16(1-\mu)}{5(1-2\mu)} \left(\frac{a}{h} \right)^2 + \frac{4a^2}{3} + \\ &+ \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 \frac{(\ell^3 + 45\ell - 80)}{20h^2} + 2f \frac{(1-\mu)a}{(1-2\mu)h^2} (\ell^4 - 3\ell^3), & (I) \\ \frac{\partial E}{\partial \ell} &= -\frac{2(1-\mu)h}{9(1-2\mu)} \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 + \frac{(4\mu-1)a}{24(1-2\mu)} \left(\frac{\Delta v}{v} \right) (3\ell^2 - 8\ell) - \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 \frac{(\ell^2 + 15)}{20h} - \\ &- f \frac{2(1-\mu)a}{3(1-2\mu)h} (4\ell^3 - 9\ell^2) + f \frac{4\mu\ell}{(1-2\mu)} \left(\frac{\Delta v}{v} \right). & (II) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Получение аналитического решения для данной системы затруднено, и нахождение численного решения осуществлялось методом Ньютона для нелинейных уравнений [3]. Так как система имеет второй порядок относительно переменной h , а отрицательного значения

Расхождение величины полуширины площадки контакта по зависимости (11) в сравнении с традиционным решением контактной задачи Герца [2] для коэффициента Пуассона составляет 0,6÷2,3 %, что говорит о приемлемости данного подхода в инженерных расчетах.

2.2. Скоростная асимметрия при отсутствии зоны «ускорения»

При $\ell_1 \neq 0$ и $\ell_3 = 0$ функционал энергии имеет вид

глубины проникновения деформации не может быть по постановке задачи, то определяющим для начального приближения является величина протяженности зоны скольжения. Уравнение (II) системы (13) имеет третий порядок относительно ℓ , и его представили в виде

$$\ell^3 - 2,25\ell^2 + f_v = 0,$$

$$f_v = - \left(\frac{3\mu h \ell}{4(1-\mu)a} + \frac{(4\mu-1)(3\ell^2-8\ell)h}{64(1-\mu)f} \right) \left(\frac{\Delta v}{v} \right) + \left(\frac{3(1-2\mu)(\ell^2+15)}{160(1-\mu)af} + \frac{h^2}{12af} \right) \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2.$$

Исследование скоростной функции показывает, что однозначное определение протяженности зоны скольжения возможно только лишь при значениях $f < -1,6875$ и $f > 0$, соответствующих интервалам $\ell < -0,75$ и $\ell > 2,25$. Нас же интересует интервал $f \in [0; -1,6875]$, где каждому значению скоростной функции будут соответствовать три значения протяженности зоны скольжения. Обозначим их как ℓ_- , $\ell_{+(1)}$, $\ell_{+(2)}$, а соответствующие им значения глубины проникновения деформации из уравнения (I) h_- , $h_{+(1)}$, $h_{+(2)}$.

Следовательно, начальными приближениями для решения системы (13) методом Ньютона будут являться следующие значения $\ell_0 = 0_-; 0_+; 2,25$ при $h_0 = h_{(7)}$. Однако, единственным решением, удовлетворяющим нашу задачу, является решение, соответствующее

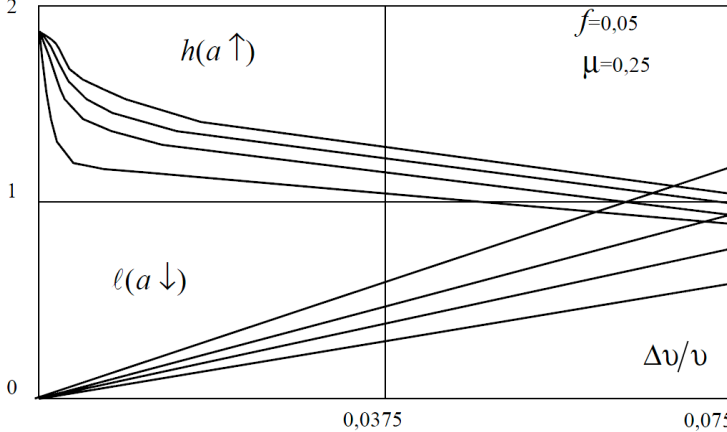


Рис. 3. Влияние асимметрии скорости на глубину проникновения деформации h и протяженность зоны скольжения ℓ при $a = 0,002; 0,005; 0,007; 0,01$

На основании аппроксимации результатов численных исследований проскальзывания, при различных значениях рассогласования скоростей, сдвигавшей нагрузки и коэффициента трения, получено приемлемое в инженерных расчетах выражение для определения протяженности зоны скольжения в виде

$$\ell = k_\mu k_a k_f \frac{\Delta v}{v}, \quad (14)$$

где $k_\mu = 36,2068 - 88,7578\mu$, $k_a = 1,05 - 29,95a$, $k_f = 1,6625 - 15,719f + 49,38f^2$.

Подстановка значения ℓ из (14) в уравнение (I) системы (13) позволяет получить квадратное уравнение относительно h , решение которого не вызывает трудностей.

2.3. Общий случай скоростной асимметрии

где f_v – скоростная функция,

начальному приближению $\ell_0 = 0_+$. Это связано тем, что отрицательного решения (начальное приближение $\ell_0 = 0_-$) не может быть по постановке задачи, а решение для $\ell_0 = 2,25$ не имеет физического смысла при нулевой разности в скоростях. Кроме этого, функционал энергии минимален при протяженности зоны скольжения ℓ , принадлежащей интервалу $[0; 1,5]$, и соответствующих им h , что легко проверяется подстановкой указанных величин (соответствующих различным начальным приближениям) в уравнение функционала (12).

В качестве примера, на рис. 3 представлено изменение глубины проникновения деформации и протяженности зоны скольжения от относительной разности скорости полуплоскостей для различных смещений их по направлению друг к другу (пропорциональных сдвигавшему воздействию).

Когда зоны скольжения образуются на входе и выходе с площадки контакта минимизация функционала энергии (9) по неизвестным h и ℓ приводит к следующей системе уравнений. Аппроксимация результатов решений этой системы позволила получить выражение аналогичное (14) со следующими коэффициентами $k_\mu = 2,0235 - 4,094\mu$, $k_a = 1,106 - 26,5001a$, $k_f = 1,6817 - 16,211f + 51,54f^2$. (15)

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Дальнейшая подстановка найденных значений в уравнения деформаций (5)-(8) с использованием закона Гука позволяет определить напряженно-деформированное состояние исследуемой области. На основании проведенных расчетов установлено, что с увеличением скоростной асимметрии происходит рост протяженности зоны скольжения и уменьшение условной глубины проникновения деформации (до

30÷50 %). Это связано с диссипацией энергии в зоне скольжения и перераспределением напряжений в деформированной области (в частности – с увеличением нормальных напряжений по всей площадке контакта).

Управляемое проскальзывание (3.2), когда имеет место рассогласование скоростей тел только на входе в контакт, применимо при производстве биметаллов. Оно будет способствовать образованию ювенальных участков на контактных поверхностях, но и может стать причиной сдвига компонентов по всей площадке, когда протяженность зоны скольжения будет

приближаться к величине $2b$. Поэтому целесообразно контролировать протяженность зоны скольжения на уровне, не превышающем половины длины площадки контакта. В противном случае, произойдет сдвиг компонентов и будет нарушена целостность биметаллической композиции. Увеличение нормальных напряжений на площадке контакта в зоне сцепления, как результат рассогласования скоростей, будет также способствовать образованию качественного соединения компонентов.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial h} &= \frac{1-\mu}{1-2\mu} \cdot \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 \cdot \frac{6-4\ell}{3} - \frac{1-\mu}{1-2\mu} \cdot \frac{16a^2}{5h^2} + \frac{4a^2}{3} - \\ &- \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 \cdot \frac{8\ell^3 - 5\ell^2 - 60\ell + 80}{20h^2} + f \cdot \frac{1-\mu}{1-2\mu} \cdot \frac{2a \cdot (\ell^4 - 3\ell^3)}{h^2} = 0; \\ \frac{\partial E}{\partial \ell} &= \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 \cdot \left[-\frac{1-\mu}{1-2\mu} \cdot \frac{4h}{9} + \frac{12\ell^2 - 5\ell - 30}{30h^2} \right] + \frac{4\mu - 1}{1-2\mu} \cdot \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{a \cdot (3\ell^2 - 8\ell)}{12} - \\ &- f \cdot \left[\frac{1-\mu}{1-2\mu} \cdot \frac{2a \cdot (4\ell^3 - 9\ell^2)}{3h} - \frac{2\mu}{1-2\mu} \cdot \frac{\Delta v}{v} \cdot \ell \right] = 0. \end{aligned} \right\}$$

Выражение (14) с коэффициентами (15) использовано для коррекция коэффициентов износа рабочих валков в системе PFC (Profile and Flatness Control) стана горячей прокатки для технологии прокатки полос с автоматическим регулированием профиля и плоскостности осевой сдвижкой рабочих валков. В алгоритме PFC применена абразивно-энергетическая модель износа, определяющего его пропорционально работе сил трения в зонах скольжения между опорным и рабочим валками (в силу наличия S-образного профиля валки имеют различные тангенциальные скорости в зоне контакта). Тогда износ рабочего и опорного валков при прокатке одной полосы определяли по уравнению:

$$u(z) = k \cdot q(z) \cdot \ell_{\tau}(z) \cdot b(z) \cdot n_{rol},$$

где k – коэффициент износа, зависящий от материалов контактирующих валков; $q(z)$ – погонное усилие, пропорциональное усилию прокатки; z – координата по длине бочки валка; $\ell_{\tau}(z)$ – протяженность зон скольжения по контактной площадке, равная удвоенному значению выражения (14); $b(z)$ – ширина площадки контакта между опорным и рабочим валками; n_{rol} – число оборотов опорного валка, пропорциональное длине прокатываемой полосы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенная методика определения зон скольжения при контакте может быть использована

при рассмотрении других трибологических процессов (трения, изнашивания и т.д.), связанных с непосредственными физическими взаимодействиями между совершающими относительное движение поверхностями. Например, управляемое проскальзывание компонентов в очаге деформации при производстве биметаллических полос, необходимо для разрушения окисной пленки и активации контактных поверхностей. Это существенно снижает обжатия, требуемые для получения неразрывного соединения. Знание протяженности зон скольжения при взаимодействии валковых пар в многовалковых прокатных клетях позволяет корректировать коэффициенты износа в системах управления в процессе прокатки для обеспечения необходимого диапазона регулирования поперечного профиля при круглосуточной работе сдвижки, а также исключить повышенный износ и выкрошку поверхности рабочих и опорных валков.

Литература

- [1] Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. -2 изд. -М.: Наука, 1988. -712 с.
- [2] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости: Пер. с англ. /Под. ред. Г.С. Шапиро. -2 изд. -М.: Наука, 1979. -560 с.
- [3] Деннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер. с англ. -М.: Мир, 1988. -440 с.